Ebene Flugbahnen starrer Körper

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Philosophischen Doktorwürde

der

Philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität

zu Berlin

zur Genehmigung vorgelegt

von

Hilde Heinicke, geb. Karselt

aus

Oldenburg i. O.

Tag der Promotion: 9. Mai 1932

Berlin 1932

269

Referenten: Prof. Dr. Edler v. Mises
Prof. Dr. Planck

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Disposition.

Einleitung.

I.

Ermittlung der Flugbahnen.

1. Das „Blatt".
2. Die Bewegungsgeichungen.
3. Die Funktionen $\mathfrak{W}$ (a) und s (a).
4. Die Phygoidentheorie von Lanchester.
5. Verfahren zur Auffindung von Näherungslösungen für die Bewegungsgleichungen.
6. Die Konstruktion der Flugbahnen.
7. Die Genauigkeit der Näherungslösung.
8. Zusammenfassung des Abschnitts I.

II.

Diskussion der Flugbahnen.

1. Abhängigkeit der Flugbahnen von den Anfangsbedingungen.
2. Die Schwerpunktsbahnen des Blattes.
3. Verhalten des Blattes während des Fluges.
4. Verhalten anderer Körper. Bewegung der Luft.
5. Zusammenfassung des Abschnitts II.

Schlußbetrachtung.

Einleitung.

Um einen Einblick in die Bewegungsverhältnisse eines Flugzeuges zu gewinnen, schuf F. W. Lanchester[1]) vor etwa 20 Jahren die sogenannte Phygoidentheorie.

Die Phygoidentheorie Lanchesters beruht auf 3 Annahmen, die die komplizierten Vorgänge des Flugablaufs stark vereinfachen. Erstens ersetzt Lanchester das Flugzeug durch einen einfachen starren Körper ohne treibenden Apparat[2]), den er sich „durch zwei parallele Führungsebenen in seiner Beweglichkeit beschränkt" vorstellt. Es werden also dem fliegenden Körper nur drei Freiheitsgrade zugeschrieben. Zweitens vernachlässigt er die energieverbrauchenden Kräfte, in der Hauptsache den Luftwiderstand. Er nimmt also entweder die Luft als reibungslos an oder denkt sich eine Kraft in der Richtung des Widerstands angreifend, die in jedem Augenblick dem Widerstand, den das Flugzeug im Fluge erfährt, genau äquivalent ist. Endlich setzt Lanchester drittens voraus, daß der Winkel zwischen der Geschwindigkeitsrichtung des Schwerpunktes des Körpers und dem starren Körper selber — da nur drei Freiheitsgrade angenommen werden, ist nur ein solcher Winkel vorhanden — dauernd konstant ist. Die zweite und dritte Annahme sind offenbar sehr gezwungene Vereinfachungen. Ziemlich leicht anzustellende Versuche zeigen bereits, daß besonders die dritte Voraussetzung nur höchst selten in der Natur realisiert wird.

Die Frage nach der allgemeinsten Bewegung eines Flugzeuges in der Form, wie sie Lanchester behandelte, ist seit Lanchesters Veröffentlichungen nicht weiter verfolgt worden. Nichtsdestoweniger erscheint es auch heute noch wünschenswert, daß die Gedanken Lanchesters fortgebildet werden. Eine Fortentwicklung dieser Gedanken will die vorliegende Arbeit sein. Sie will die von Lanchester unter Anwendung bestimmter Voraussetzungen gefundenen Resultate durch Veränderung der Annahmen verbessern und so die Phygoidentheorie verallgemeinern.

---

[1]) F. W. Lanchester, Aerodynamik, ein Gesamtwerk über das Fliegen. Deutsch von C. A. Runge. Band 2, 1911.

[2]) Einen solchen Körper nennt Lanchester Ballast-Aeroplan; höher entwickelte Formen bezeichnet er mit Aerodon.

Von den drei Voraussetzungen Lanchesters läßt die vorliegende Arbeit die erste, nach der dem starren Körper nur drei Feiheitsgrade zukommen, ungeändert. Die zweite Voraussetzung, daß Energieverluste während des Fluges nicht eintreten, wird dahin umgebildet, daß der Körper während des Fluges auch Energie verliert. Die dritte Voraussetzung der Konstanz des von der Geschwindigkeitsrichtung des Schwerpunktes und dem Körper gebildeten Winkels wird ebenfalls fallengelassen.

I.

Ermittelung der Flugbahnen.

1. Das „Blatt".

Der Körper, mit dessen Flugbahnen wir uns beschäftigen, sei starr und besitze eine Symmetrieebene, in der der Schwerpunkt des Körpers liegt. Der Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes falle stets in diese Symmetrieebene, die während der ganzen Bewegung vertikal gerichtet sein soll.

Ferner werde vorausgesetzt, daß auch die Resultierenden der auf den Körper während der Bewegung wirkenden äußeren Kräfte in die Symmetrieebene fallen. Für die Schwerkraft trifft dieses jedenfalls zu. Von den Luftkräften kann es der Symmetrie halber angenommen werden.

Aus diesen Annahmen folgt, daß der Körper nur drei Freiheitsgrade besitzt; d. h. der Schwerpunkt ist frei beweglich in jeder Richtung der vertikalen Ebene, die die Flugbahn enthält, und der Körper ist drehbar um eine darauf senkrecht stehende Achse.

Ein starrer Körper mit den vorstehenden Eigenschaften kann für die kinetische Untersuchung durch eine in der Vertikalebene liegende ebene Scheibe, die Masse und Trägheitsmoment besitzt, ersetzt werden.

Entsprechend den drei Freiheitsgraden ist die Bewegung durch drei Gleichungen vollständig bestimmt; zwei entsprechen der Translation des Körpers, eine seiner Drehung um die zur Flugebene senkrechte Achse.

Die während der Bewegung wirkenden äußeren Kräfte sind die Schwerkraft und die Kräfte, die von der Luft infolge der Bewegung auf die einzelnen Teile des Körpers

ausgeübt werden. Die letzteren setzen sich zu einer in der Symmetrieebene liegenden Resultierenden zusammen.

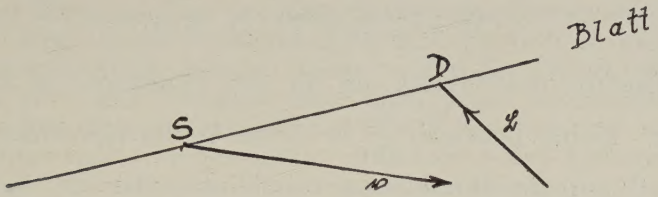
Die Größe und Richtung der Luftkraft ist abhängig von den Geschwindigkeitsvektoren aller Punkte des Körpers und von den Winkeln, die diese Vektoren mit den Teilen des Körpers bilden. Man nennt die Winkel Anstellwinkel. Hat der Körper nicht nur eine translatorische Bewegung, so haben die einzelnen Punkte nicht denselben Geschwindigkeitsvektor und auch verschiedene Anstellwinkel, die nicht unabhängig voneinander sind. Wir werden nun bei unseren Rechnungen stets einen rotationslosen Anfangszustand annehmen und nur Fälle betrachten, bei denen der Einfluß der Rotation auf die Luftkraft vernachlässigt werden kann. Wir nehmen also für die Berechnung der Luftkraft — und nur für diese — an, daß der Geschwindigkeitsvektor jedes Punktes dem Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes gleich ist, und daß die Luftkraft nur von der Größe dieser einen Geschwindigkeit und ihrem Winkel mit der Stellung des Körpers abhängt.

Um eine experimentelle Grundlage für die Abhängigkeit zu bekommen, werden wir weiter voraussetzen, daß die für die Lufteinwirkung maßgebenden Teile des bewegten Körpers in der Hauptsache aus einer einzigen Ebene bestehen, die senkrecht zur Symmetrieebene liegt, so etwa, wie der — eben vorausgesetzte — Tragflügel eines Flugzeuges. Als Anstellwinkel kann dann der Winkel dieser Ebene mit dem Geschwindigkeitsvektor bezeichnet werden. Für die Größe der zugehörigen Luftkraft liegt zahlreiches Beobachtungsmaterial vor. Für die Abhängigkeit der Luftkraft von der Geschwindigkeit können wir für die Geschwindigkeitsbereiche, die beim Flugzeug in Frage kommen, hinreichend genau das quadratische Gesetz annehmen. Ueber die Abhängigkeit vom Anstellwinkel werden wir weiter unten noch eingehend zu sprechen haben.

Als Angriffspunkt der Luftkraft oder Druckmittelpunkt bezeichnen wir ihren in der Symmetrieebene gelegenen Schnitt mit der Ebene, auf die sie wirkt.

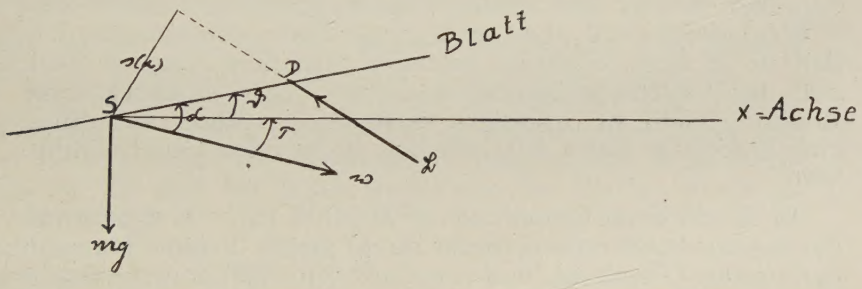
Der bewegte Körper, den wir unserer Betrachtung zu Grunde legen, hat somit in gewissen Grenzen die Gestalt eines beschwerten Blattes und soll daher im folgenden kurz als „Blatt" bezeichnet werden. Für alle Rechnungen kommt

nur der Schnitt des Blattes mit der Symmetrieebene in Frage (siehe Abbildung).



2. Die Bewegungsgleichungen.

$\mathfrak{v}$ = Geschwindigkeit des Schwerpunktes nach Größe und Richtung,
m = Masse des Körpers.



Dann gilt die Schwerpunktsgleichung:

$$(1)\ (2)\quad m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{G} + \mathfrak{v}^2\mathfrak{W}(\alpha),$$

wobei $\mathfrak{G}$ die Schwerkraft und $\mathfrak{v}^2\mathfrak{W}(\alpha)$ die Luftkraft ist. $\mathfrak{W}(\alpha)$ ist aus der Messung bekannt.

Die Gleichung (1) (2) ist eine Vektorgleichung; sie entspricht also zwei Komponentengleichungen für die Translation des Blattes.

Ist ϑ der Winkel zwischen Blatt und Horizontale in der Symmetrieebene, ω die Winkelgeschwindigkeit [3]) und T das

[3]) $\omega = \dot{\vartheta}$; $\dot{\omega} = \ddot{\vartheta}$.

Trägheitsmoment des Körpers, so kennzeichnet die Gleichung

$$(3)\quad T\frac{d\omega}{dt} = v^2 \mathfrak{W}(\alpha) \cdot s(\alpha)$$

die Drehung des Blattes um die zur Flugebene senkrechte Achse. Dabei bedeutet $\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$ die Winkelbeschleunigung, $v^2 \mathfrak{W}(\alpha) \cdot s(\alpha)$ das Drehmoment der Luftkraft; $s(\alpha)$ bedeutet den senkrechten Abstand der Luftkraft vom Schwerpunkt, $s(\alpha)$ ist eine Funktion des Anstellwinkels und ist durch Messung festgestellt worden.

Für den Fall der stationären Bewegung müssen wir in den Gleichungen (1) (2) und (3) alle Ableitungen nach der Zeit gleich Null setzen. Die Gleichungen lauten dann:

$$0 = \mathfrak{G} + v^2 \mathfrak{W}(\alpha)$$
$$0 = v^2 \mathfrak{W}(\alpha) \cdot s(\alpha)$$

Aus der ersten der beiden Gleichungen folgt, daß $\mathfrak{G}$ und $v^2 \mathfrak{W}(\alpha)$ gleich groß, aber entgegengerichtet sein müssen, d. h. daß sie in ihrer Wirkung einander aufheben. Daraus folgt, daß der Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes seine Richtung nicht zu verändern vermag. Das Blatt durchfliegt eine gradlinige Bahn mit konstant bleibender Geschwindigkeit.

In der zweiten Gleichung: $v^2 \mathfrak{W}(\alpha) \cdot s(\alpha) = 0$ muß einer der beiden Faktoren $s(\alpha)$ und $v^2 \mathfrak{W}(\alpha)$ gleich 0 sein. Da nach der ersten Gleichung und wegen $\mathfrak{G} \neq 0$ $v^2 \mathfrak{W}(\alpha)$ nicht 0 sein kann, so gilt demzufolge $s(\alpha) = 0$. Da $s(\alpha)$ der senkrechte Abstand der Luftkraft vom Schwerpunkt des Blattes ist, besagt $s(\alpha) = 0$, daß der Druckmittelpunkt während der ganzen Bewegung mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Die Kräfte üben kein Drehmoment auf das Blatt aus. Der Winkel zwischen Blatt und Horizontale in der Symmetrieebene, den wir ϑ nannten, und der die Neigung des Blattes gegen die Horizontale angibt, bleibt also während der ganzen Bewegung ungeändert. Aus dem Konstantbleiben von ϑ und aus der immer gleichen Richtung der Geschwindigkeit folgt weiter die Unveränderlichkeit des Anstellwinkels α.

3. Die Funktionen $\mathfrak{W}(\alpha)$ und $s(\alpha)$.

Die Luftkraft rührt von den Druckunterschieden her, die infolge der Bewegung an der Oberfläche des Blattes entstehen. Für eine ideale Flüssigkeit, als die die Luft in erster Näherung angesehen werden kann, wirkt der Druck stets senkrecht auf jedes Teilchen eines dem Druck ausgesetzten Körpers. Da dies nur annähernd der Fall ist, so ist eine kleine tangentielle Komponente vorhanden: der Reibungswiderstand. Wir können diesen jedoch seiner Geringfügigkeit wegen vernachlässigen, ohne daß ein merklicher Fehler in unserer Untersuchung entsteht. Demnach wollen wir annehmen, daß die Luftkraft genau senkrecht auf das Blatt gerichtet ist.

Für die Größe dieser normal zum Blatt gerichteten Kraft pflegt man $\frac{\zeta}{g} \cdot v^2 \cdot F \cdot \mathfrak{W}(\alpha)$ [4]) zu schreiben, wobei F die tatsächliche Größe des Blattes in m^2, v die Größe der Geschwindigkeit in m/sec, $\frac{\zeta}{g}$ die Dichte der Luft (normal ungefähr $^1/_8$) und $\mathfrak{W}(\alpha)$ den sog. Beiwert bezeichnet. Der Beiwert gibt die Abhängigkeit der Kraft vom Anstellwinkel an.

Die Ermittlung des Beiwertes ist offenbar von größter Wichtigkeit. Durch Experiment ist festgestellt worden, daß der Beiwert eine sehr verwickelte Funktion des Anstellwinkels ist, die sich für jedes Verhältnis des Blattes Breite zu Tiefe verändert. Der Beiwert wächst zuerst für kleine Winkel proportional α, strebt dann stark einem Maximum zu, das umso höher liegt, je kleiner das Verhältnis Breite zu Tiefe des Blattes ist, um schließlich nach einem je nach dem Seitenverhältnis mehr oder minder ausgeprägten Abfallen gegen den Beiwert des normal zur Luft bewegten Blattes zu gehen.

Für unsere Untersuchungen werden wir die Größe des Beiwertes für einen Anstellwinkel von 0^0 bis 90^0 brauchen. Tabellen der Beiwerte für dieses Intervall sind aufgestellt worden einerseits von der Göttinger Versuchsanstalt[5]), andererseits von G. Eiffel[6]).

---

[4]) S.: v. Mises, Fluglehre, dritte Auflage, S. 22.

[5]) Der Verlauf des Beiwertes nach den Veröffentlichungen d. Göttinger Versuchsanstalt ist abgedruckt in: v. Mises, Fluglehre, 3. Auflage, S. 230.

[6]) S.: Gustav Eiffel, L'Aviation et la Résistance de l'Air, 1914.

Bei einem Vergleich zeigt es sich, daß die von der Göttinger Versuchsanstalt mitgeteilten Werte im allgemeinen etwas größer sind als die Werte Eiffels. Dieser Unterschied dürfte darauf zurückzuführen sein, daß der von Eiffel benutzte Windkanal eine größere Turbulenz der Strömung aufzuweisen hatte.

Wir werden in unserer Arbeit die Angaben der Göttinger Versuchsanstalt verwenden.

Von sehr großer Bedeutung ist des weiteren die Funktion $s(\alpha)$. Da die Luftkraft unserer Annahme gemäß immer genau senkrecht zum Blatt gerichtet ist[6a]), so ist $s(\alpha)$ gleich der Entfernung des Druckmittelpunktes vom Schwerpunkt. Da der Schwerpunkt des Blattes festliegt, ist es nur nötig, die Abhängigkeit der Mittelpunktlage vom Anstellwinkel festzulegen. Diese Abhängigkeit wird Wanderung des Druckmittels genannt.

Die durch Messung erhaltenen Daten für die Druckmittelwanderung sind in Tabellen zusammengestellt worden, die für α von 0^0 bis zu 90^0 die Entfernung des Druckmittelpunktes vom Vorderrand des Blattes angeben. Aus ihnen können wir für jede Schwerpunktslage die Entfernung von Druckmittelpunkt und Schwerpunkt errechnen.

Der Sinn der durch das Moment $\mathfrak{v}^2 \mathfrak{W}(\alpha) \cdot s(\alpha)$ bedingten Drehung des Blattes ist davon abhängig, ob der Druckmittelpunkt, bezogen auf die Bewegungsrichtung des Blattes, vor oder hinter den Schwerpunkt zu liegen kommt. Liegt er vor dem Schwerpunkt, so bewirkt das Drehmoment eine Vergrößerung des Winkels ϑ; kommt er hinter den Schwerpunkt zu liegen, so wird ϑ verkleinert, wobei ϑ wieder der Winkel zwischen Blatt und Horizontale in der Symmetrieebene ist.

In unserer Untersuchung werden wir die von G. Eiffel erhaltenen Werte für die Lage des Druckmittelpunktes verwenden, da in den Veröffentlichungen der Göttinger Versuchsanstalt die Druckmittelpunktwanderung für ein Blatt nicht angegeben ist.

Nach den Tabellen ändert sich die Druckpunktlage für kleine α stärker als für große Werte von α. Wächst z. B. bei einem Seitenverhältnis 3 α von 0^0 bis $17{,}5^0$, so wandert der Druckmittelpunkt auf der Symmetrieachse von der Vor-

[6a]) S. Seite 9.

derkante des Blattes, bis er $^4/_{10}$ der Gesamtbreite des Blattes vom Vorderrand entfernt liegt. Für α von $17{,}5^0$ bis 90^0 legt der Druckmittelpunkt nur $^1/_{10}$ der Flächenbreite zurück, um bei $\alpha = 90^0$ mit dem geometrischen Mittelpunkt zusammen zu fallen.

4. Die Phygoidentheorie[7]) von Lanchester.

Hier schalten wir einen Abschnitt über die Phygoidentheorie von Lanchester ein, indem wir in unsere Gleichungen (1) (2) und (3)[8]) die von Lanchester gemachten Voraussetzungen[9]) einführen[10]).

Nach der dritten Voraussetzung Lanchesters ist der Anstellwinkel während der ganzen Bewegung konstant. Gleichung (3) wird durch diese Annahme ersetzt.

Da aus der absoluten Konstanz des Anstellwinkels gleichzeitig folgt, daß die Luftkraft gleich v^2 *konst.* ist, lautet Gleichung (1) (2):

$$m\frac{\delta \mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{G} + \mathfrak{v}^2 \cdot \textit{konst.}$$

Die Größe der Luftkraft ist durch v^2 *konst.* bestimmt.

Da Lanchester in seiner zweiten Voraussetzung die energieverbrauchenden Kräfte vernachlässigt, erfährt der sich bewegende Körper von der umgebenden Luft keinen die Bewegung hemmenden Widerstand. Somit darf die Luftkraft keine Komponente entgegen der Geschwindigkeitsrichtung des Schwerpunktes besitzen. Bei Lanchester steht die Luftkraft jederzeit senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunkts. Sie besitzt demnach die Richtung eines Auftriebes.

Der Angriffspunkt der Luftkraft liegt während der ganzen Bewegung im Schwerpunkt des in Bewegung befindlichen Körpers.

Um auf die Form der Phygoiden-Gleichung zu kommen, schreiben wir nun die obige Vektorgleichung

---

[7]) Das Wort „Phygoide" ist nicht zutreffend. S. darüber: Lanchester, Aerodynamik, Bd. 2, 1911, Anhang. Lanchester verwechselt die griechischen Worte für „fliehen" und „fliegen".

[8]) Vergl. Seite 7 u. 8.

[9]) Vergl. Seite 4.

[10]) Gegenstand der Phygoidentheorie sind „die Gestalt und Gleichungen der Flugbahn eine Aerodons". Dem Aerodon entspricht unser Blatt.

$$m \frac{\delta v}{dt} = \mathfrak{G} + v^2 \cdot konst.$$

in zwei Komponentengleichungen senkrecht und parallel zum Geschwindigkeitsvektor und dividieren durch m. Es ist alsdann:

$$(a) \quad \frac{dv}{dt} = - g \sin \vartheta$$

$$(b) \quad \frac{v^2}{\varrho} = \frac{v d\tau}{dt} = - g \cos \vartheta + v^2 \cdot k$$

wobei ϱ der Krümmungsradius der Bahn ist. Ist τ der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und der Horizontalen, und ersetzt man den Bogen vdt durch eine Gerade und sin $d\tau$ durch $d\tau$, so ist: $\frac{vdt}{\varrho} = d\tau$,

folglich: $\frac{v^2}{\varrho} = \frac{v d\tau}{dt}$.

Die Annahme des konstanten Anstellwinkels und die Annahme des Senkrechtstehens der Luftkraft auf dem Geschwindigkeitsvektor machen die mathematische Behandlung der Gleichungen (a) und (b) einfach. (a) läßt sich unschwer integrieren.[11])

Multiplizieren wir (a) mit v, so steht links die Zunahme der lebendigen Kraft, rechts die Arbeit der Schwere. Es empfiehlt sich, eine neue unabhängige Variable y, die sog. Fallhöhe über einem Nullniveau, einzuführen. y werde nach unten positiv gerechnet. Die Arbeit der Schwere läßt sich dann schreiben

$$v \frac{dv}{dt} = - g \, v \sin \tau = g \frac{dy}{dt}$$

Integriert:

$$(a)^1 \quad \frac{v^2}{2} = g y,$$

wobei die auftretende Integrationskonstante gleich 0 gesetzt worden ist. Dies bedeutet, daß die Fallhöhe von einer Stelle aus gerechnet wird, in der der fliegende Körper die Geschwindigkeit 0 besitzt.

[11]) Vergl. hierzu: R. Fuchs und L. Hopf, Aerodynamik, Handbuch der Flugzeugkunde, Berlin 1922, Seite 369 f.

Führt man auch in (b) die unabhängige Variable y ein und eliminiert v durch Gleichung (a^1), so erhält man

$$2\,g\,y\frac{d\cos\tau}{dy} = -\,g\cos\tau + 2\,k\,g\,y.$$

Die Variablen können durch Division mit $\sqrt{y}$ getrennt werden.

$$\frac{d}{dy}\left(\sqrt{y}\cos\tau\right) = k\sqrt{y}$$

$$\sqrt{y}\cos\tau = {}^2/_3\,k^{3/2} + C$$

$$\text{(c)}\qquad \cos\tau = {}^2/_3\,k\,y + \frac{C}{\sqrt{y}}$$

Gleichung (c) ist die von Lanchester angegebene Phygoiden-Gleichung.

Gibt man in irgend einem Zeitpunkt die Anfangswerte für τ, k und C vor, so gibt Gleichung (c) den weiteren Verlauf der Flugbahn an; die zu jeder Höhe y gehörige Geschwindigkeit liefert Gleichung $(a)^1$. Die Bahnkurven nennt Lanchester Phygoiden, eine ganze Serie solcher Bahnen eine Phygoidentafel[12]).

5. Verfahren zur Auffindung von Näherungslösungen für die Bewegungsgleichungen.

Nach dieser für unsere späteren Darlegungen noch wichtig werdenden Abschweifung kehren wir zu den Gleichungen (1) (2) und (3)[13]) zurück. Wir werden versuchen, aus ihnen die Flugbahn des Blattes zu ermitteln.

Da die Funktionen von α, $\mathfrak{W}(\alpha)$ und $s(\alpha)$, wie wir gesehen haben, sehr verwickelt sind und sich nicht in analytische Ausdrücke fassen lassen, ist eine geschlossene Integration der Gleichungen (1) (2) und (3) unmöglich. Um überhaupt etwas über die Flugbewegung aussagen zu können, wenden wir deshalb ein Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen an, das in seinen Grundzügen dem von Cauchy angegebenen Integrationsverfahren entspricht. Ton Th. Vahlen

[12]) Siehe F. W. Lanchester, Aerodynamik, Band 2, 1911, Seite 44.
[13]) S. Seite 7 u. 8.

wurde das Verfahren auf die der unsern ähnlichen Aufgaben der Ballistik angewendet.[14])

Das Auffinden von Näherungslösungen geschieht auf Grund der Gleichungen (1) (2) und (3) auf folgendem Wege:

Wir zerlegen den Zeitraum, für den wir den Bewegungsverlauf suchen, in kurze Zeitintervalle von der Länge $\triangle t$. Für jedes solcher Intervalle ersetzen wir die rechten Seiten der Gleichungen (1) (2) und (3) durch konstante Mittelwerte, behandeln also die Bewegung so, als ob sie innerhalb eines jeden Zeitintervalls gleichförmig beschleunigt wäre. Sind die $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1 \ldots\ldots\ldots$ die Werte der rechten Seite von (1) (2), also die mittleren Werte der Kraftresultierenden in dem Intervall, das zur Zeit $t = 0$, $t = \triangle t$, $t = 2\triangle t \ldots\ldots$ beginnt, so folgt aus unserer Annahme, daß die Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{v}_0, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3 \ldots\ldots\ldots$ zu diesen Zeiten durch

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} m\,(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_0) = \mathfrak{A}_0 \triangle t \\ m\,(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1) = \mathfrak{A}_1 \triangle t \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

gegeben sind.

Sind analog $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \ldots\ldots\ldots$ die Werte der rechten Seite von (3), also die mittleren Werte des Drehmoments in dem Zeitintervall, das zur Zeit $t = 0$, $t = \triangle t$, $t = 2 \triangle t \ldots$ beginnt, so folgt aus unserer Annahme, daß die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_0, \omega_1 \ldots\ldots$ durch

$$\begin{aligned} T\,(\omega_1 - \omega_0) &= \mathfrak{B}_0 \triangle t \\ T\,(\omega_2 - \omega_1) &= \mathfrak{B}_1 \triangle t \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

gegeben sind.

Da die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von den jeweiligen Werten von v und α abhängen, müssen wir auch noch die Winkel $\alpha_0, \alpha_1 \ldots\ldots$, d. h. die mittleren Werte der Anstellwinkel in dem zur Zeit $t = 0$, $t = \triangle t \ldots\ldots$ beginnenden Intervall berechnen.

Es ist:

$$\alpha = \vartheta - \tau,$$

wobei τ der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und der Horizontalen bedeutet. Durch die Gleichungen:

---

[14]) Theodor Vahlen, Balistik, 1922, S. 29. Ferner Theodor Vahlen, Artilleristische Monatshehfte, April/Mai 1918.

$$(B)\quad \begin{cases} T\,(\vartheta_1 - \vartheta_0) = {}^1/_2\ \mathfrak{B}_0\ \triangle t^2 + \dot{\vartheta}_0\ \triangle t \\ T\,(\vartheta_2 - \vartheta_1) = {}^1/_2\ \mathfrak{B}_1\ \triangle t^2 + \vartheta_1\ \triangle t \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

sind die Werte der $\alpha_0 = \vartheta_0 - \tau_0$; $\alpha_1 = \vartheta_1 - \tau_1 \ldots\ldots$ festgelegt, da die T durch die Gleichungen (A) mitgegeben sind.

Nunmehr gestatten die Gleichungen (A) zusammen mit den Gleichungen (B), die Bahn des Schwerpunktes und die Stellung des Blattes zur Horizontalen näherungsweise aufzusuchen, in dem man in die Ausdrücke $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ für v und α zunächst die Anfangswerte des betreffenden Intervalls einsetzt. Also:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &= \mathfrak{G} + v_0{}^2\ \mathfrak{W}\ (\vartheta_0 - \tau_0) \\ \mathfrak{A}_1 &= \mathfrak{G} + v_0{}^2\ \mathfrak{W}\ (\vartheta_1 - \tau_1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{B}_0 &= v_0{}^2\ \mathfrak{W}\ (\vartheta_0 - \tau_0) \cdot s\ (\vartheta_0 - \tau_0) \\ \mathfrak{B}_1 &= v_1{}^2\ \mathfrak{W}\ (\vartheta_1 - \tau_1) \cdot s\ (\vartheta_1 - \tau_1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

6. Konstruktion der Flugbahnen.

Wenn wir im folgenden auf Grund der Gleichungen (A) und (B) die Flugbahnen konstruieren wollen, so werden wir uns darauf beschränken, die Flugbahnen eines ganz bestimmten Körpers aufzusuchen. Die in den Gleichungen (A) und (B) enthaltenen Werte von $\frac{\zeta}{g}\frac{F}{m}$ (Gleichung (A)) und $\frac{\zeta}{g}\frac{F}{\tau}$ (Gleichung (B)) würden alsdann Konstante sein.[15]) Es sei die Luftdichte $\frac{\zeta}{g} = {}^1/_8$, die für die Lufteinwirkung allein maßgebende Fläche F des Körpers (Blatt) 0,3 · 0,1 m, die Masse m des Körpers 0,002 kg. Das Trägheitsmoment T des Körpers sei gleich dem Trägheitsmoment der rechteckigen ebenen, homogen gedachten Fläche für den in der Ebene liegenden Schwerpunkt. Der Schwerpunkt des Körpers endlich liege um ${}^4/_{10}$ b vom Vorderrande des Blattes entfernt.

[15]) Im Absatz 4 des zweiten Abschnittes der Arbeit werden wir ganz kurz auf Flugbahnen anderer Körper hinweisen.

Zum Zweck der Konstruktion der von dem eben charakterisierten Körper beschriebenen Flugbahn berechnen wir zuerst folgende zwei Diagramme):

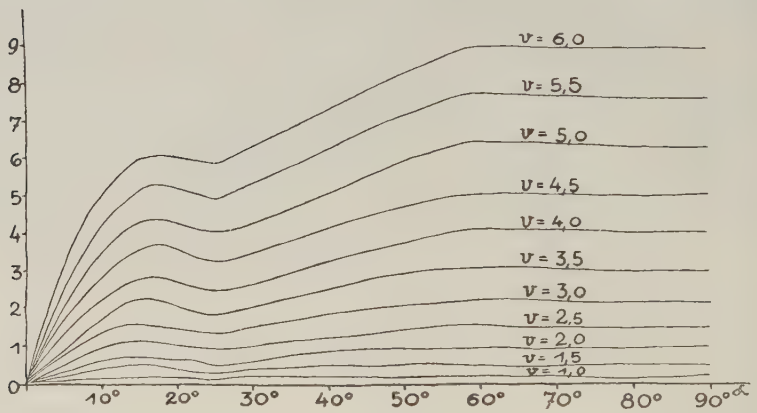


Diagramm I

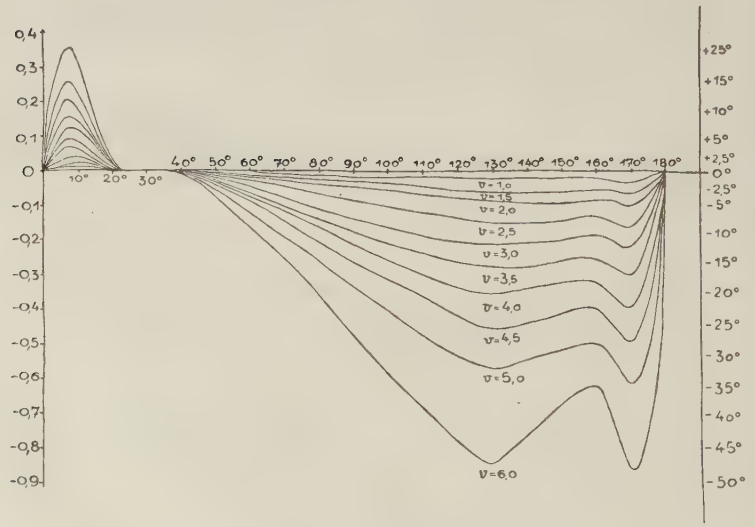


Diagramm II

Diagramm I gibt die in den Gleichungen (A) enthaltene Verzögerung durch die Luftkraft $= g \frac{\zeta}{} \cdot v^2 \cdot F \cdot \mathfrak{W}(\alpha)$ wieder, m

die der Körper im Zeitintervall $\triangle$ t erfährt. In dem Diagramm ist die Größe der Verzögerung für α zwischen 0^0 und 90^0 [17]) und v gleich 1; 1,5; 2; 2,5; . . . . . dargestellt.

Diagramm II gibt für verschiedene Geschwindigkeiten und für α zwischen 0^0 und 180^0 die Aenderung des Winkels ϑ im Zeitintervall $\triangle$ t an. Nach den Gleichungen (B) ist diese Aenderung für die Zeiten

$$t + \triangle t : {}^1/_2 \frac{\mathfrak{B}_0}{T} \triangle t^2 + \dot{\vartheta}_0 \triangle t$$

$$t + \triangle t : {}^1/_2 \frac{\mathfrak{B}_1}{T} \triangle t^1 + \dot{\vartheta}^1 \triangle t$$

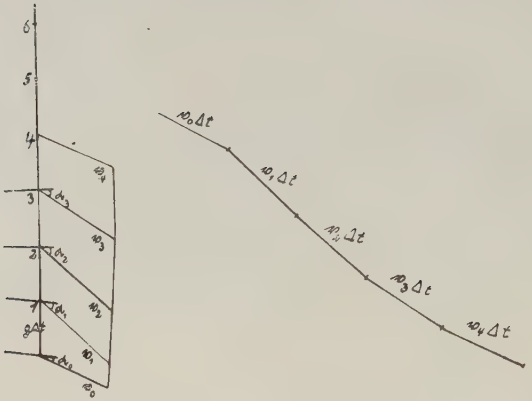
. . . . . .

Wählen wir nun $\triangle$ t genügend klein ($\triangle$ t = ${}^1/_{10}$), so wird das Glied $\dot{\vartheta} \triangle t$ so gering werden, daß wir es, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, vernachlässigen können. Wenn die ϑ sehr groß werden, so muß das Glied $\dot{\vartheta} \triangle t$ als Korrektionsglied berücksichtigt werden.

Auf Grund der Gleichungen (A) und (B) und unter Benutzung der eben besprochenen Diagramme für die durch die Luftkraft im Zeitintervall $\triangle$ t bewirkte Verzögerung und für die Veränderung des Winkels ϑ im Zeitintervall $\triangle$t können wir die Flugbahnen ohne besondere Mühe aufzeichnen. Der Gang der Konstruktion sei in kurzen Worten angegeben. Die gleichzeitige Betrachtung der zeichnerischen Ausführung der Konstruktion wird die Beschreibung derselben klarer werden lassen.

Wir wählen zuerst einen ganz beliebigen Anfangszustand des Blattes zur Zeit t = 0, der durch die Werte von v_0, ϑ_0, α_0 charakterisiert wird, und zeichnen das Blatt mit dem im Schwerpunkt angreifenden Geschwindigkeitsvektor. Vom Schwerpunkt des Blattes aus ziehen wir sodann eine Vertikale, auf der wir nacheinander die Größe der konstanten Erdbeschleunigung g für die Zeitintervalle $\triangle$ t auftragen.

[17]) Die Verzögerung für $\alpha = 100^0$ ist gleich der für $\alpha = 180^0 - 100^0$ usw.



Die Endpunkte der einzelnen g $\triangle$ t bezeichnen wir mit 1, 2, 3 . . . . . Dem Diagramm I entnehmen wir dann mit dem Zirkel die zu ν_0, ϑ_0, α_0 im Zeitintervall $\triangle$ t gehörige Verzögerung durch die Luftkraft und tragen sie im Endpunkt des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}_0$ unserer Voraussetzung nach senkrecht zum Blatt an. Den Endpunkt der Verzögerung verbinden wir mit 1. Nach der ersten der Gleichungen (A) ist diese Verbindung der neue Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_1$.

Dem Diagramm II entnehmen wir dann den Zuwachs, den ϑ_0 während der Zeit $\triangle$t erfahren hat, und erhalten die neue Größe von ϑ zur Zeit $t_0 + \triangle t$, also ϑ_1, und können in 1 — das ist im Anfangspunkt des Geschwindigkeitsvektors — die neue Lage des Blattes zur Horizontalen angeben. Durch die Kenntnis des Winkels ϑ_1 im Zeitpunkt $t_0 + \triangle t$, und durch die Größe und Richtung der Geschwindigkeit in diesem Zeitpunkt ist auch die Größe des Anstellwinkels α_1 bestimmt.

Jetzt haben wir dasselbe Bild wie zur Zeit t = 0 und können die eben gekennzeichnete Konstruktion wiederholen, indem wir nun ν_1, ϑ_1, α_1 als Anfangswerte betrachten wie vorhin ν_0, ϑ_0, α_0. Auf dieselbe Weise wie vorhin ermitteln wir aus ν_1, ϑ_1, α_1 die Werte ν_2, ϑ_2, α_2, also die Werte

von Geschwindigkeitsgröße, Stellung des Blattes zur Horizontalen und Stellung des Blattes zum Geschwindigkeitsvektor im Zeitpunkt $t_0 + 2\triangle t$. Indem wir immer wieder die neu erhaltenen Werte von v, ϑ, α als Anfangswerte ansehen, können wir die Konstruktion beliebig oft wiederholen und erhalten so für die aufeinanderfolgenden Zeitpunkte t_0; $t_0 + \triangle t$; $t_0 + 2 \triangle t$. . . . . die die Bewegung des Blattes charakterisierenden Größen.

Aus der Konstruktionsfigur gewinnen wir die Flugbahn des Blattes, indem wir die Wege des Blattes in den einzelnen Zeitabschnitten $\triangle t$ aneinanderreihen. Es geschieht durch Parallelverschiebung der konstruierten mit $\triangle t$ multiplizierten Geschwindigkeitsvektoren.[18])

Durch diese Aneinanderreihung erhalten wir einen Polygonzug. Die sich dem Polygonzug am besten anschließende Kurve ist die gesuchte Flugbahn des Körpers. Die konstruierte Flugbahn wird der wirklichen Bahn offenbar umso näher kommen, je kleiner das Zeitintervall gewählt wird.

Der verschiedenen Wahl der Anfangsbedingung gemäß erhält man eine ganze Serie von Flugbahnen, die in ihrer Gesamtheit den von Lanchester in seiner Phygoidentafel[19]) niedergelegten Phygoiden entsprechen.

7. Die Genauigkeit der Näherungslösungen.

Die von uns konstruierten Flugbahnen enthalten Fehler, die sich wie bei allen auf graphischem Wege gefundenen Näherungslösungen im wesentlichen aus zwei Fehlerquellen herleiten.

Der bei sorgfältiger Ausführung der Zeichnung geringere Fehler ist der, der durch den Gebrauch von Zirkel und Lineal, durch die Benutzung von Diagrammen usw. entsteht. Zwei Aufzeichnungen einer Flugbahn bei vollkommen gleichen Anfangsbedingungen werden daher, wenn sie ganz unabhängig voneinander gezeichnet werden, immer Unterschiede aufweisen. Um ein Urteil über die Größe dieser

---

[18]) Die Multiplikation mit $\triangle t$ kann gleich in der Konstruktionsfigur vorgenommen werden. In der angefertigten Zeichnung wurde diese Konstruktion nicht vermerkt, da die Uebersichtlichkeit der Figur besonders an den Stellen, wo die Richtung der Geschwindigkeit der Senkrechten nahe kam, darunter gelitten hätte.

[19]) Siehe F. W. Lanchester, Aerodynamik, Band 2, 1911, Seite 44.

Differenz zu erhalten, ist ein Teil der gleichen Flugbahn zweimal konstruiert worden.[20]) Die Aufzeichnung ergibt, daß die Bahnen im gleichen Punkt beginnen, sich eine Zeitlang vollkommen überdecken, um dann voneinander abzuweichen. Der Unterschied zwischen beiden Bahnen beträgt nach der Zeichnung ungefähr 1,3 % des zurückgelegten Weges.

Erheblich wichtiger als der Fehler, der durch die Ungenauigkeit beim Zeichnen entsteht, ist der, der seinen Ursprung in dem zur Auffindung der Flugbahnen angewandten Näherungsverfahren hat. Das Näherungsverfahren gründet sich auf die Annahme, daß die rechten Seiten der Gleichungen (1) (2) und (3) im Zeitintervall $\triangle t$ durch konstante Mittelwerte ersetzt werden. Um ein Urteil über den Einfluß der Größenwahl des Zeitintervalls zu gewinnen, ist wieder wie vorhin dieselbe Flugbahn zweimal aufgezeichnet worden.[21]) Die Konstruktion wurde einmal durchgeführt, indem ν, ϑ und α zu Beginn jedes Zeitintervalls $\triangle t$ festgestellt wurden. Bei der zweiten Durchführung wurden die gemachten Schritte halbiert, d. h. ν, ϑ und α wurden zu Anfang jedes $\frac{\triangle t}{2}$ ermittelt. Vergleicht man Konstruktion 1 und 2 miteinander, so sieht man, daß beim halben Schritt die Maximalgeschwindigkeit des Blattes etwas geringer ist. Die Differenz zwischen den aufgezeichneten Flugbahnen beträgt nach der Zeichnung ungefähr 5 % des zurückgelegten Weges.

Um die Genauigkeit der einzelnen Flugbahnen zu erhöhen, ist während der Konstruktion das Zeitintervall nicht immer gleichmäßig mit $\triangle t = {}^1/_{10}$ angenommen worden.[22]) Wenn die Geschwindigkeiten stark anstiegen, wenn sie also im Zeitintervall große Aenderungen an Größe und Richtung aufwiesen, so wurden ν, ϑ und α zu Anfang jeder Zeitspanne $\frac{\triangle t}{2}$ und $\frac{\triangle t}{4}$ festgelegt.[23])

---

[20]) Konstruiert wurde Flugbahn II (S. Seite 24). Siehe die 2. der beiden Zeichnungen auf Seite 21.
[21]) S. die 1. Zeichnung auf Seite 21.
[22]) a. Flugbahnen III—VII.
[23]) S. besonders Flugbahn VII.

8. Zusammenfassung des Abschnitts I.

Zusammenfassend können wir den Inhalt des Abschnitts I folgendermaßen wiedergeben:

Der starre Körper, dessen Flugbahn wir ermitteln wollen, besitzt eine Symmetrieebene. In diese Symmetrieebene fällt die Resultierende der äußeren Kräfte und die Anfangsgeschwindigkeit. Daraus folgt, daß die Bewegung nur 3 Freiheitsgrade besitzt.

Die äußeren Kräfte sind die Schwerkraft und die Kräfte, die die Luft infolge der Bewegung auf den Körper ausübt. Wir setzen diese Kräfte gleich denen, die eine ebene, rechteckige Fläche bei ihrer Bewegung durch die Luft erfährt. In diesem Sinne wird der ganze Körper durch ein ebenes „Blatt" ersetzt.

Die Größe der Luftkraft ist dann eine Funktion der Geschwindigkeit des Schwerpunkts und des Anstellwinkels des Blattes $[v^2 \mathfrak{W}(\alpha)]$. Die Richtung der Luftkraft ist senkrecht zum Blatt. Die Lage des Angriffspunktes der Luftkraft (Druckmittelpunkt) ist eine Funktion des Anstellwinkels ($s(\alpha)$ = Entfernung Schwerpunkt — Druckmittelpunkt). Die Funktionen $\mathfrak{W}(\alpha)$ und $s(\alpha)$ sind durch Messung bestimmt.

Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers

$$m \frac{dv}{dt} = \mathfrak{G} + v^2 \mathfrak{W}(\alpha)$$

$$T \frac{d\omega}{dt} = v^2 \mathfrak{W}(\alpha) \cdot s(\alpha)$$

lassen eine geschlossene Integration nicht zu. Es können nur Näherungslösungen der vorstehenden Gleichungen angegeben werden. Das zeichnerische Verfahren zur Bestimmung solcher Lösungen beruht darauf, daß die ungleichmäßig beschleunigte Bewegung in jedem Zeitintervall $\triangle$ t durch eine gleichmäßig beschleunigte ersetzt wird. Nach dem ausführlich dargelegten Verfahren sind bei verschiedenen Anfangsbedingungen Flugbahnen aufgezeichnet, und es ist versucht worden, über die Genauigkeit der erzielten Näherungslösungen einige Angaben zu machen. Der Besprechung der konstruierten Bahnen ist der zweite Abschnitt der Arbeit gewidmet.

II.

Diskussion der Flugbahnen.

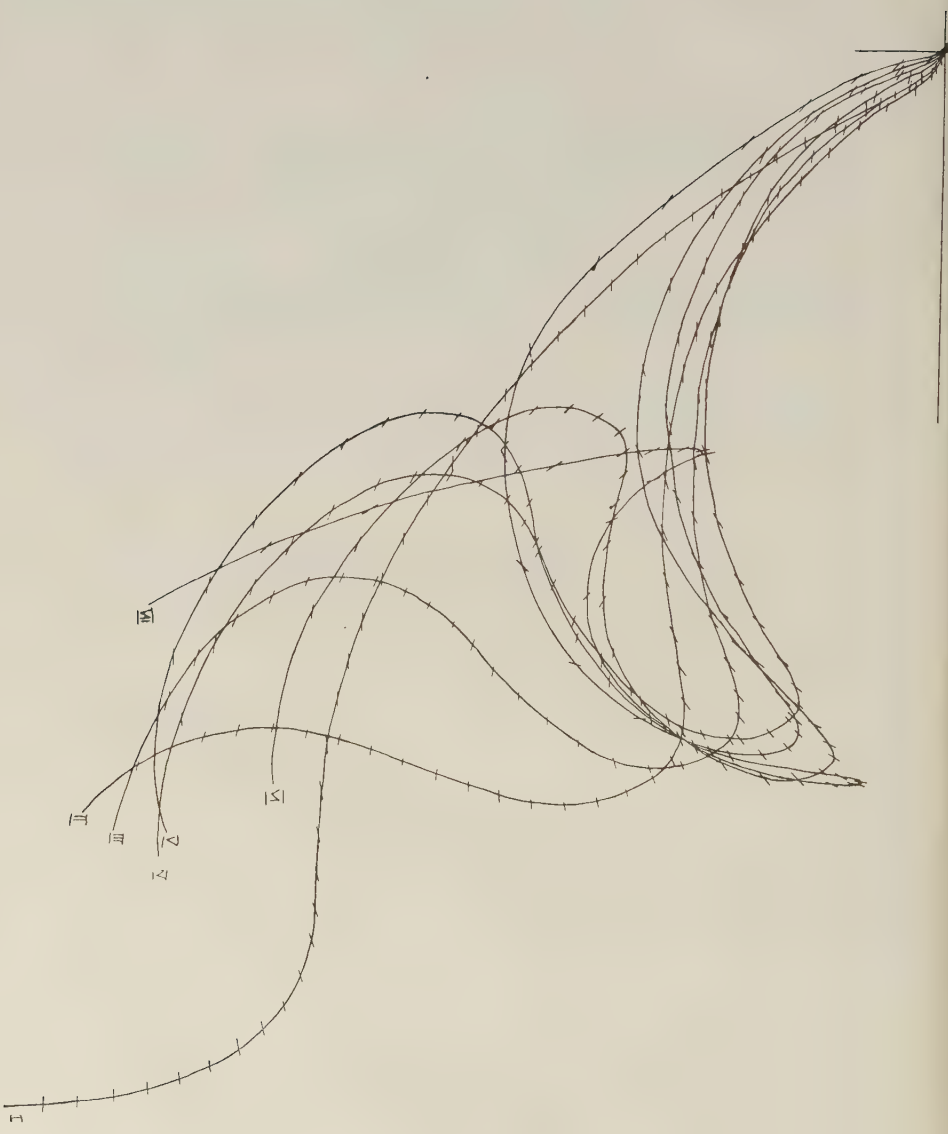
1. Abhängigkeit der Flugbahnen von den Anfangsbedingungen.

Im ersten Abschnitt der Arbeit haben wir den Weg für die Konstruktion der Flugbahnen gewiesen, die ein Körper bei gegebenen $\frac{\zeta}{g}\,\frac{F}{m}$ und $\frac{\zeta}{g}\,\frac{F}{T}$, aber bei beliebigen Anfangsbedingungen beschreibt. In den Zeichnungen wird die Wahl der Anfangsbedingungen zweckmäßigerweise so vorgenommen werden, daß die entstehende Schar von Flugbahnen ein anschauliches Bild von den möglichen Flugbewegungen unseres Körpers vermittelt.

Es sei zunächst eine Schar von Flugbahnen — Flugbahn I—VII — aufgezeichnet, bei denen die Anfangswerte der Größe der Geschwindigkeit (v_0) und des Anstellwinkels (α_0) konstant bleiben, während der von dem Blatt und der Horizontalen gebildeten Winkel (ϑ_0) in der Weise verändert wird, daß Unterschiede von je 10^0 entstehen. Setzt man $v_0 = 1$ und $\alpha_0 = 10^0$, so ergeben sich folgende Anfangszustände:

	v^0	α_0	ϑ_0
Flugbahn I:	1	10^0	0^0
» II:	1	10^0	-10^0
» III:	1	10^0	-20^0
» IV:	1	10^0	-30^0
» V:	1	10^0	-40^0
» VI:	1	10^0	-50^0
» VII:	1	10^0	-60^0

Bei dieser Wahl der Anfangszustände würde das Blatt im ersten Fall horizontal, in den folgenden Fällen mit gleichmäßig wachsender Neigung gegen die Horizontale seinen Flug beginnen.


ㅁ
ㅂ
ㅅ
ㅇ
ㅈ
ㅊ
ㅋ
ㅌ
ㅍ

Die Flugbahnen VIII und IX wollen aufzeigen, wie sich eine Variation der Anfangswerte von ν einerseits und von α andererseits auswirkt, [23a]) wenn die anderen Größen jeweils unverändert gelassen werden.

In den Zeichnungen sind die Flugbahnen des Blattes immer nur soweit verfolgt worden, bis die für den jeweiligen Anfangszustand charakteristische Gestalt der Bahn zu Tage tritt. Um den gesamten Ablauf der Flugbahnen zu veranschaulichen, ist bei Flugbahn II auch der weitere Verlauf dieser Bahn konstruiert worden (siehe Abbildung). – – – Aus dem Verhalten der die Kurve konstituierenden drei Größen ν, α, ϑ während der Flugbewegung und aus ihren Veränderungn läßt sich auf den mutmaßlichen Ablauf der unter den anderen Anfangsbedingungen sich vollziehenden Flugbewegungen schließen, so daß sich eine zeichnerische Durchführung sämtlicher Fälle erübrigt.

[23a]) Verglichen mit Flugbahn II.
Flugbahn VIII: $\nu_0 = 2$, $\alpha_0 = 10^0$, $\vartheta_0 = -10^0$
» IX: $\nu_0 = 1$, $\alpha_0 = 20^0$, $\vartheta_0 = -10^0$

- FLUGBAHN X -

2. Die Schwerpunktsbahnen des Blattes.

Den Zeichnungen ist zu entnehmen, daß die Formen der Schwerpunktsbahnen, welche bei dem Abwurf eines Blattes entstehen können, charakteristisch in die Erscheinung treten, wenn im Anfang der Bewegung Geschwindigkeit (ν_0) und Anstellwinkel (α) bei allen Bahnen gleich sind und die Neigung des Blattes zur Horizontalen (ϑ_0) variierte wird ($-60^0 \leqq \vartheta \leqq 0^0$). Die Bahnen[24]) werden wir jetzt einer näheren Betrachtung unterwerfen.

Allen Bahnen von den einfachsten bis zu den kompliziertesten ist gemeinsam, daß sie im Mittel schräg nach abwärts gerichtet sind.

Bei $\vartheta_0 = 0^0$, d. h. wenn das Blatt beim Abwurf mit der Horizontalen zusammenfällt, beschreibt der Schwerpunkt eine sehr schwach wellenförmige„ schräg nach abwärts weisende Bahn[25]). Geben wir dem Blatt beim Abwurf eine leichte Neigung gegen die Horizontale[26]), so wird die eben erwähnte sehr schwache Wellenbewegung allmählich stärker[27]). Die Amplitude der Wellen wächst mit zunehmender Neigung gegen die Horizontale. Wird der Neigungswinkel stark vergrößert, so entstehen die eigenartigen Kuppenbildungen[28]). Mit noch stärker wachsender Neigung gegen die Horizontale gehen die Kuppen in Spitzen über, die schließlich von Schleifen abgelöst werden.

Von den beiden letztgenannten Bahnarten sind keine Zeichnungen hergestellt worden. Flugbahn VII aber kommt der Spitzenbahn sehr nahe. Die Konstruktion der Schleifenbahnen ist mühevoll und zeitraubend, da man der großen Geschwindigkeitsänderungen wegen sehr kleine Zeitintervalle wählen muß. Dem Aufwand von Mühe entspricht nicht das erzielte Resultat, da wir die zu erwartenden Bahnformen durch Schlüsse aus dem Verhalten von ν, α und ϑ während der Flugbahnen I—VII festlegen können. Wir werden hierauf noch im weiteren Verlauf der Arbeit zurückkommen.[29])

Nachdem die charakteristischen Bildungen von Kuppe, Spitze und Schleife erreicht worden sind, nimmt das Blatt

[24]) Flugbahnen I—VII.
[25]) Flugbahn I.
[26]) Flugbahn II u. III.
[27]) Flugbahn IV, V, VI.
[28]) Flugbahn VII.
[29]) Vergl. Seite 34.

im Verlauf der Bewegung einen überraschenden Weg.[30]) Schon bei den wellenförmigen Bahnen[31]) läßt sich eine — wenn auch nur sehr geringe — Einbiegung der Flugbahnen entgegen der Gesamtrichtung der Bahn beobachten. Diese Einbiegung wird bei den Bahnen mit ausgeprägter Kuppenbildung so stark, daß der von dem Blatt in diesem Teil der Bewegung zurückgelegte Weg die beim Anstieg zur Kuppe gebildete Bahn schneidet.[32]) Es bildet sich abermals eine Kuppe aus, die regelmäßig etwas schärfer ausgeprägt ist als die zuerst gebildete Kuppe. Bis zu dieser Kuppe, bei wellenförmigen Bahnen bis zu der Einbiegung, wollen wir die für den Anfangszustand des Blattes charakteristische Flugbahn rechnen.

Aendern wir nun den Anfangszustand des Blattes nicht durch Veränderung von ϑ_0, sondern durch Variation von v_0 und α_0 [33]), so können wir feststellen, daß die Aenderungen dieser letzteren beiden Werte nicht den gleichen Einfluß auf die Gestalt der Flugbahnen haben wie die des Winkels ϑ_0. Wir können im besonderen feststellen, daß ein Vergrößern der Anfangsgeschwindigkeit ein bedeutendes Flacherwerden der Welle hervorruft. Verglichen mit Flugbahn II liegt das Maximum der Geschwindigkeitsgröße etwas niedriger als bei dieser (Flugbahn II: Maximum von $v = 3{,}20$; Flugbahn VIII: Maximum von $v = 2{,}85$), obwohl die Anfangsgeschwindigkeit bei Flugbahn VIII größer ist.

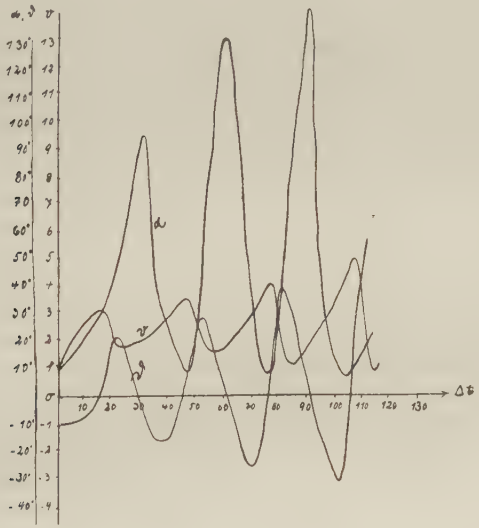
Variieren wir den Anstellwinkel α_0 bei Flugbahn II in der Weise, daß wir α_0 statt mit 10^0 mit 20^0 annehmen, so erfährt die Gestalt der Flugbahn[34]) keine wesentliche Aenderung. Dieses würde aber wohl anders werden, wenn wir α_0 verkleinerten, also z. B. annehmen würden $\alpha_0 = 0$. Das leuchtet ein, da $s\ (\alpha)$ zwar im Intervall $10^0 \leqq \alpha \leqq 40^0$ fast konstant bleibt, im Intervall $0^0 \leqq \alpha \leqq 10^0$ aber umso stärkeren Veränderungen ausgesetzt ist.

Sämtliche Flugbahnen zeigen, daß bei jeder Flugbewegung die Form der ersten Periode der durchflogenen Schwerpunktsbahn sich nicht noch einmal wiederholt, da das Blatt,

[30]) Siehe Flugbahnen IV—VII.
[31]) Siehe Flugbahnen II u. III.
[32]) Siehe Flugbahn VII.
[33]) Siehe Flugbahnen VIII u. IX.
[34]) Flugbahn IX.

wie aus den Zeichnungen abzulesen ist, nach Vollendung der charakteristischen Kurve nicht ein zweites Mal seine Anfangslage einnimmt.

Flugbahn II, die wir weiter verfolgten[34a]), zeigt, daß im Laufe der Bewegung die Schwankungen zwischen den größten und kleinsten Werten der die Bahn konstituierenden drei Größen v, α und ϑ mit jeder weiteren Flugphase stärker werden. Deutlicher noch als aus der Konstruktion und der Flugbahn selber ist dies aus der unten stehenden Zeichnung zu ersehen, in der die bei der Konstruktion der Flugbahn II erhaltenen Werte von v, α und ϑ wiedergegeben sind.



Die Frage, ob das Blatt durch das Manöverieren in der Luft einer bestimmter ausgezeichneten Lage zustrebt, die ihm z. B. ein senkrechtes Abwärtsfallen oder ein gleichförmiges gradliniges Abwärtsgleiten ermöglichen würde, müßte demnach verneint werden.

Bei den sich ständig steigernden Geschwindigkeitsschwankungen wird die Schwerpunktsbahn im Gegenteil

[34a]) S. Seite 26.

immer größere und schärfere Richtungsänderungen aufweisen. Der ganze Charakter der Bewegung wird immer unruhiger und unausgeglichener.[35])

3. Verhalten des Blattes während des Fluges.

Die Stellung des Blattes während des Fluges wird festgelegt durch die Winkel ϑ und α. ϑ bestimmt die Lage des Blattes zur Horizontalen, α die Lage zum Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes.

Bei den eben gekennzeichneten Flugbahnen weist ϑ mehr oder minder ausgeprägte Schwankungen seiner Größe auf. Bei den Wellenbahnen sind die im Verlauf der Bewegung eintretenden Veränderungen von ϑ verhältnismäßig gering. Mit wachsendem Anfangswert des absoluten Betrages von ϑ wachsen auch die Schwankungen der Winkelgröße während der weiteren Bewegung, und zwar so, daß die Gradzahl der negativen wie die der positiven Werte zunimmt.

Das Konstantbleiben von ϑ während einiger Zeitintervalle haben die Abschnitte schärfster Richtungsänderung während der Bewegung aufzuweisen. Sie sind gleichzeitig die Stellen, wo ϑ einen Maximalwert erreicht. Bei Flugbahn I beträgt die größte Differenz der ϑ - Werte 44^0, bei Flugbahn VII 163^0. Der größte positive Wert von ϑ liegt bei der ersten Bahn bei 24^0, bei der zweiten bei 83^0. Je stärker die Neigung gegen die Horizontale in der Anfangslage ist, umso mehr richtet sich also das Blatt im Verlauf der Bewegung auf. Wählt man eine noch stärkere Anfangsneigung gegen die Horizontale, als für Flugbahn VII gewählt worden ist (z. B. $\vartheta_0 = -70^0; -80^0 \ldots$), so wird ϑ den Wert von $+90^0$ erreichen oder ihn sogar übertreffen. Im ersteren Fall haben wir es dann mit den bereits erwähnten Spitzenbahnen, im letzteren Fall mit den ebenfalls bereits genannten Schleifenbahnen zu tun.

Der Anstellwinkel α weist ebenfalls wesentliche — im Vergleich zu ϑ noch weitaus größere — Schwankungen seines Wertes auf. Auch bei ihm wächst die Veränderung in dem Maße, in dem sich die Wellenform der Flugbahn ausprägt, bzw. in die Kuppen-, Spitzen- oder Schleifenbahn übergeht.

[35]) Siehe Flugbahnen III—VII.

Bei Flugbahn I beträgt die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten ϑ-Wert 106°, bei Flugbahn VII 171°. Einem größten Wert von 113° bei Flugbahn I steht ein größter Wert von 173° bei Flugbahn VII gegenüber.

Die Veränderungen, die der Anstellwinkel erfährt, sind am schärfsten an den Stellen stärkster Krümmung der Flugbahn, also im Abschnitt der Kuppe, Spitze usw., da hier mit großen Aenderungen der Richtung des Geschwindigkeitsvektors ein Konstantbleiben der Neigung des Blattes zur Horizontalen während einiger Zeitabschnitte verbunden ist. Das gegenseitige Verhalten der Winkel ϑ und α an den Kuppen, Spitzen usw. bedingt die oben beschriebene Einbiegung[36]) der Flugbahnen entgegen der Gesamtrichtung der Bahn. Während das Blatt diese Einbiegung seiner Flugbahn durchfliegt, bewegt es sich in " der entgegengesetzten Richtung zu der, für welche es gebaut ist "[37]); d. h. während dieser Zeit kommt der Druckmittelpunkt in Bezug auf die augenblickliche Bewegungsrichtung hinter den Schwerpunkt zu liegen. Dies geschieht immer dann, wenn der Geschwindigkeitsvektor die Blattnormale passiert ($\alpha < 90°$). Das Blatt „verliert seine Stabilität", wie Lanchester sich ausdrückt[38]), wenn der Geschwindigkeitsvektor im Laufe der Bewegung einmal die Blattnormale im negativen Sinne überstreicht; es gewinnt sie zurück, wenn das Ueberqueren im positiven Sinne geschieht. Von unseren Bahnen zeigt vollkommen „Stabilität" nur die sehr schwach wellenförmige Flugbahn I. Schon bei Flugbahn II und dann erst recht bei den folgenden passiert der Geschwindigkeitsvektor die Blattnormale zuerst im negativen Sinn, alsdann bei einer zweiten Ueberquerung im positiven Sinn.

Lanchester ist zu diesen Ergebnissen nicht gekommen.[39]) Für ihn ist nur die Umgebung der Spitze auf der Phygoidentafel, etwa unserer Flugbahn VII entsprechend, der „gefährliche Bereich", wo dem Blatt Verlust der „Stabilität" droht, denn an dieser Stelle müßte man sich das Blatt „künstlich

---

[36]) Lanchester, Aerodynamik, Bd. I, 1911, S. 52.

[37]) Lanchester, Aerodynamik, Bd. II, 1911; Bedingungen der Instabilität, der gefährliche Bereich a. d. Phygoidentafel, S. 52.

[38]) Da die sog. „Instabilität" auf dem enormen Anwachsen des Anstellwinkels beruht, Lanchester aber einen allzeit konstanten Anstellwinkel annimmt, konnte er in der Tat zu einem anderen Ergebnis nicht kommen.

[39]) Siehe Seite III; IV und V.

umgedreht“ denken, damit es seinen Flug fortsetzen kann.

Die Größe der Geschwindigkeit endlich unterliegt bei allen Bahnen kontinuierlich mehr oder weniger starken Veränderungen. Wie die Veränderungen von ϑ und α, so sind auch die Veränderungen von v am schwächsten bei den wellenförmigen Bahnen. Bei Flugbahn I ist die kleinste Geschwindigkeit die Anfangsgeschwindigkeit $v = 1$, die größte $v = 3{,}2$. Die geringste Geschwindigkeit der Flugbahn VII beträgt $v = 0{,}2$, die größte Geschwindigkeit $v = 7{,}8$. Die Geschwindigkeit nimmt immer ab, wenn ϑ zunimmt, und wird größer, wenn ϑ fällt.

Stellt man ein graphisches Bild des Verhaltens der drei Werte, v α und ϑ[40]) in den Flugbahnen II; IV; VII dar, so treten die gegenseitigen Beziehungen hier noch deutlicher hervor, als das bei der Konstruktionsfigur der Bahnen der Fall ist. Wir können aus diesen Kurven folgendes ablesen:

1. Erreicht die Größe der Geschwindigkeit ein Maximum. so wird an dieser Stelle die Neigung des Blattes gegen die Horizontale (ϑ) gleich Null.

2. Erreicht die Größe der Geschwindigkeit ein Minimum, so liegt an dieser Stelle ein Maximum von ϑ.

3. Das Schneiden der α - Linie mit der ϑ – Linie bedeutet, daß die beiden Winkel im Schnittpunkt einander gleich sind. Der Geschwindigkeitsvektor ist in diesem Punkt horizontal gerichtet, seine Vertikalkomponente verschwindet also. (Die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit verschwindet, wenn im Laufe der Bewegung $\alpha - \vartheta = 90^0$ wird.)

Man erkennt aus den drei Diagrammen auch deutlich das Anwachsen der Schwankungen von v, α und ϑ, wenn man von den wellenförmigen Bahnen zu den höher entwickelten Flugbahnen fortschreitet, d. h. wenn man die Flugbahnen in der Reihenfolge betrachtet, daß die Anfangsneigung des Blattes zur Horizontalen ständig stärker wird. Aus der Tatsache des Anwachsens der Distanz zwischen den größten und kleinsten Werten von v, α und ϑ beim Anwachsen der Anfangsneigung des Blattes kann man sich eine Vorstellung von dem Verlauf der Flugbahnen eines Blattes machen, dessen Anfangsneigung noch stärker ist als die der Flugbahn VII ($\vartheta_0 = -70^0$; -80^0; -90^0). Das Minimum

---

[40]) Auf eine Wiedergabe der graphischen Bilder ist verzichtet worden Sie haben denselben Charakter wie die Zeichnung auf Seite 29.

der Geschwindigkeitsgröße wird immer tiefer zu liegen kommen, während gleichzeitig das Maximum von ϑ steigt. Es ist zu vermuten, daß, wenn $\nu = 0$ ist, $\vartheta = + 90^0$ sein wird, und daß demzufolge das Blatt eine Spitzenbahn durchfliegen wird. Bei weiter zunehmender Anfangsneigung wird die Geschwindigkeitsgröße im Laufe der Bewegung negativ, und der Winkel ϑ überschreitet den Wert von $+ 90^0$. Es entstehen die bereits erwähnten Schleifenbahnen. Die Aenderungen des Anstellwinkels sind an der Spitze und bei der Schleifenbildung selbstverständlich sehr stark.

4. Verhalten anderer Flugkörper. Bewegung der Luft.

Bei allen unseren Flugbahnen haben wir es mit einem nach Fläche, Masse und Schwerpunktslage bestimmten Körper zu tun. Demgemäß sind in den bisherigen Ausführungen die in den Ausdrücken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ enthaltenen Werte von $\frac{\zeta}{g}\frac{F}{m}$ und $\frac{\zeta}{g}\frac{F}{\tau}$ als konstant angesehen worden. Es versteht sich von selbst, daß andere Körper andere Flugbahnen aufzuweisen haben. Im folgenden sei zum Vergleich die Flugbahn eines quadratischen Blattes betrachtet, dessen Schwerpunkt in den geometrischen Mittelpunkt fällt.[41]) Das Blatt fällt im Mittel senkrecht zur Erde. Die Formen der Flugbahn richten sich auch hier im wesentlichen nach der Größe der Aanfangsneigung des Blattes gegen die Horizontale. Ihr entsprechend erhalten wir Wellenbahnen mit mehr oder weniger großer Amplitude.

Ferner ist bisher auch die den Körper umgebende Luft stets als vollkommen ruhig angenommen worden. Diese Annahme ist zur Durchführung der Konstruktion der Flugbahn nicht zwingend notwendig. Sofern Größe und Richtung der Luftbewegung bekannt sind, läßt sich auch bei bewegter Luft die Konstruktion ohne Schwierigkeit durchführen. Zur Erdbeschleunigung und Verzögerung durch den Luftwiderstand braucht nur die durch den Wind bewirkte Verzögerung oder Beschleunigung subtrahiert bzw. addiert zu werden. Es läßt sich auch die durch den Wind verursachte Größe und Richtung der Drehung des Blattes ohne weiteres feststellen. Die Konstruktion der Flugbahnen wird dadurch lediglich etwas umständlicher.

[41]) Der Winkel ϑ^0, unter dem das Blatt abgeworfen wird, sei positiv.

In gleicher Weise lassen sich die Einwirkungen von Steuermaßnahmen, durch die lediglich eine Veränderung des Anstellwinkels eintritt, konstruktiv erfassen.

5. Zusammenfassung des Abschnitts II.

Im Abschnitt II ist, wie wir uns kurz vergegenwärtigen, folgendes festgestellt worden:

Die Form der Flugbahn eines Blattes ist abhängig von den Anfangswerten der Geschwindigkeit (v), des Anstellwinkels (α) und der Anfangsneigung des Blattes zur Horizontalen (ϑ).

Von den gleichen Größen ist die beim Flug eintretende Drehung des Blattes abhängig.

Die Gesamtheit der möglichen Flugbahnen eines Blattes zeigt in dem Maße, in dem seine Anfangsneigung gegen die Horizontale vergrößert wird, ein Fortschreiten von ganz schwach wellenförmigen Bahnen, die allmählich ausgeprägtere Form annehmen, zu Bahnen, die nach und nach in die Kuppen-, Spitzen- und endlich Schleifenform übergehen.

Von den stark wellenförmigen Bahnen bis zu den Schleifenbahnen finden im Laufe der einzelnen Flugbewegung Ueberquerungen der Blattnormale durch den Geschwindigkeitsvektor statt, die zu einer Einbiegung der Bahn — in schärfer ausgeprägten Fällen zur Bildung von neuen Kuppen oder gar Spitzen und Schleifen — führen.

Die Größe der Geschwindigkeit und die Lage des Blattes zur Horizontalen und zum Geschwindigkeitsvektor sind für jeden Bahnpunkt bestimmbar. Die Distanzen zwischen dem größten und kleinsten Wert von v, α und ϑ während einer Flugbahn werden umso größer, je stärker die Anfangsneigung des Blattes zur Horizontalen war.

Die Geschwindigkeit erreicht ihr Maximum, wenn das Blatt horizontal liegt; sie erreicht ihr Minimum, wenn die Neigung des Blattes gegen die Horizontale am stärksten ist.

Die stärksten Aenderungen und höchsten Werte des Anstellwinkels liegen je nach der Art der Flugbahn im Bereich des Wellenberges, der Kuppe, der Spitze oder der Schleife.

Schlußbetrachtung.

Vergleicht man abschließend das Ergebnis der im vorigen entwickelten Gedankengänge mit dem von Lanchester gewonnenen Ergebnis, so unterscheiden sich die beiden Ergebnisse wesentlich. Während die Flugbahnen Lanchesters in der Weise entstehen, daß sich gleichförmige Phasen aneinander reihen und eine im Mittel horizontal gerichtete Bahn bilden, sind die von uns konstruierten Flugbahnen bei verschiedenartigen Phasen im Mittel schräg nach abwärts gerichtet. Im Gegensatz zu dem Flugkörper Lanchesters, der bei der Form seiner Flugbahn zu einem Ende des Fluges niemals kommen kann, muß unser Blatt nach einer begrenzten Flugdauer den Erdboden erreichen, wodurch sein Flug beendet wird.

Die Verschiedenheit der Ergebnisse findet ihre Erklärung vor allem darin, daß wir zwei wichtige Größen, den Luftwiderstand und die Funktion $s(\alpha)$, die Lanchester beide gleich Null setzte, mit ihren realen Werten berücksichtigen. In voller Erkenntnis der Tragweite seiner Annahmen hat Lanchester sich bemüht, ein Korrektiv anzubringen. Er versuchte dies einmal, indem er die realen Werte der beiden vernachlässigten Größen in seine Gleichungen einführte, fand aber, daß diese alsdann „zu unhandlich wurden und eine Integration nicht mehr zuließen". Zum anderen versuchte er es, indem er in die bereits durchkonstruierten Bahnen nachträglich die beiden Werte „zur Korrektion" einführte.

Des weiteren haben unsere Untersuchungen zu Tage gefördert, daß es ein Näherungsverfahren gibt, welches ermöglicht, die besonderen Einflüsse, die die Beschaffenheit des Flugkörpers, die jeweiligen Windverhältnisse und die Steuermaßnahmen auf die Form der Flugbahn ausüben, zu berücksichtigen. Die Phygoidentheorie Lanchesters läßt für eine Berücksichtigung dieser Momente keinen Raum.

Ob und wieweit das Ergebnis unserer theoretischen Untersuchungen durch den tatsächlichen Ablauf von Flugbewegungen gestützt wird, läßt sich z. Zt. nicht feststellen, da die Flugbewegungen der von uns betrachteten Körper experimentell nicht genügend durchforscht sind. Wir sind allein angewiesen auf die Ergebnisse der Experimente Lanchesters, die unsere Ergebnisse recht gut bestätigen. Sowohl die Beobachtung, daß diese Körper regelmäßig schräg nach abwärts fliegen, als auch die weitere Beobachtung, daß sie stets ihr Gleichgewicht zu erhalten, bzw. im Falle des Verlustes sofort wieder zu erlangen bestrebt sind, um deren theoretische Begründung Lanchesters sich bemühte, konnten mit Hilfe des von uns angewandten Verfahrens nachgewiesen werden.

Lebenslauf.

Ich, Johanna Margarethe Hilde Heinicke geb. Karselt, wurde geboren am 28. Januar 1904 zu Berlin als Tochter des Lehrers Richard Karselt und seiner Ehefrau Marie geb. Starick.

Ich bin preußischer Angehöriger und bekenne mich zum evangelischen Glauben. Seit dem Jahre 1929 bin ich mit dem Syndikus Dr. Günther Heinicke in Oldenburg i. O. verheiratet.

Zum Ostertermin des Jahres 1910 wurde ich in das Sophien-Lyzeum aufgenommen, das ich 1920 mit der Lyzeumsreife verließ. Ich besuchte darauf die II. Städtische Studienanstalt (Oberrealschule) und legte zum Herbsttermin 1923 die Reifeprüfung ab.

Im Wintersemester 1923/24 wurde ich an der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin immatrikuliert und bei der Philosophischen Fakultät inscribiert. Im Laufe meines Studiums hörte ich u. a. Vorlesungen folgender Herren Professoren: Bieberbach, Dessoir, Wolfgang Köhler, v. Laue, Heinrich Maier, v. Mises, Planck, Pringsheim, Schlenck, Schur.

Meine Dissertation „Ebene Flugbahnen starrer Körper" ist im Seminar des Herrn Prof. Dr. v. Mises entstanden, dem ich für seine Förderung meinen herzlichsten Dank ausspreche.